Soluciones. Junio 2002
Bloque A

1A

$$\left.\begin{array}{rrr} x+y & & =1 \\ & my+z & =0 \\ x+(1+m)y+mz & & =m+1 \end{array}\right\}$$ Pasando a forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m+1 \end{pmatrix}$$ Estudiemos el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m+1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & m & m & m \end{array}\right)$$

Si m = 0 el sistema es compatible determinado porque solo me quedan dos ecuaciones con tres incógnitas.

$$\xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & m \end{array}\right)$$

- Si m = 1 queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y=1 \\ y+z=0 \\ 0=1 \end{array}\right\}$ El sistema es incompatible.

- Si m = 0 queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y=1 \\ z=0 \\ -z=0 \end{array}\right\}$ El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

Si llamo $y = t$ (parámetro), las infinitas soluciones son de la forma: $\left.\begin{array}{l} x=1-t \\ y=t \\ z=0 \end{array}\right\}$

- Si $m \neq 0$, $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Tiene una única solución

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

2A

$$y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 1}$$

a)

- Dominio de definición: $\mathbb{R}$ - {-1 , 1} porque el denominador se anula para estos dos valores.

- Corte con el eje X:
  Para $y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$
  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$ No tiene solución $\Rightarrow$ No corta al eje X.
- Corte con el eje Y:
  Para $x = 0$, $y = -4$ $\Rightarrow$ La función corta al eje Y en el punto (0 , -4)

b)

- Asíntotas horizontales:
  $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 1} = 1$ $\Rightarrow$ **Y = 1** es una asíntota horizontal.
- Asíntotas verticales:

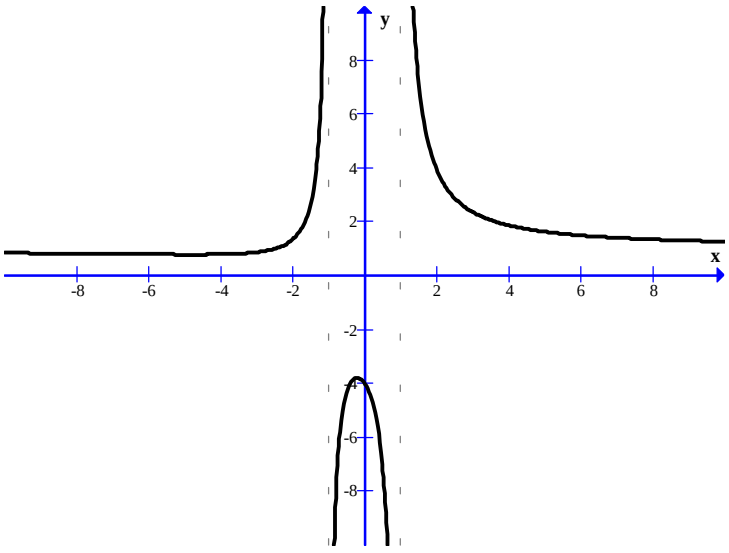
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 1} = \infty \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 1} - \infty \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 1} = \infty$$

  Luego **X = 1** **X = -1** son asíntotas verticales.

- Asíntotas oblicuas
  $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - x} = 0$ Luego no hay asíntotas oblicuas.

c) Representación gráfica



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

3A

Si X = duración media de un televisor , $X \to N(10\,,\,0'7)$

a) Tipificando la variable: $\dfrac{X-10}{0'7} = Z \to N(0,1)$

$$p(X>9) = p\left(\frac{x-10}{0'7} > \frac{9-10}{0'7}\right) = p(Z>-1'42) = p(Z<1'42) = 0'9222$$

b) $p(9 \le Z \le 11) = p\left(\dfrac{9-10}{0'7} \le \dfrac{X-10}{0'7} \le \dfrac{11-10}{0'7}\right) = p(-1'42 \le Z \le 1'42) =$

$$= 2\,p(Z \le 1'42) - 1 = 2 \cdot 0'9222 - 1 = 0'8444$$

4A

Por ser A y B independientes : $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Se sabe que $p(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ y $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{3}$

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = \frac{1}{3} \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Por tanto, $\left.\begin{array}{l} p(A)\cdot p(B) = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{2}{3} = p(A) + p(B) - \dfrac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p(A)\cdot p(B) = \dfrac{1}{6} \\ p(A) + p(B) = \dfrac{5}{6} \end{array}\right\}$

$$p(A) = \frac{5}{6} - p(B) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5}{6} - p(B)\right)p(B) = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{6}p(B) - [p(B)]^2 = \frac{1}{6}$$

$$-6\,p^2(B) + 5\,p(B) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-12} = \frac{-5 \pm 1}{-12}$$

$p(B)$ = 1/3 y $p(B)$ = ½

- Si $p(B)$ = 1/3, entonces $p(A)$ = 1/2
- Si $p(B)$ = 1/2, entonces $p(A)$ = 1/3

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Bloque B

1B

a) $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$

La última igualdad es cierta si $-AB+BA=0 \Rightarrow AB=BA$, es decir, si A y B conmutan

b) Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

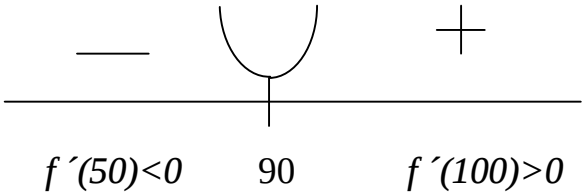
- $A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $A-B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
- $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $B^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $A^2-B^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$
- $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$ porque $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

2B

a) $y=\frac{x^2}{400}-\frac{9x}{20}+\frac{113}{4}$

Para hallar el mínimo, derivamos e igualamos a cero:

$y'=\frac{x}{200}-\frac{9}{20}=0 \Rightarrow x-90=0 \Rightarrow x=90$ Km/h es la velocidad a la que se obtiene el consumo mínimo.

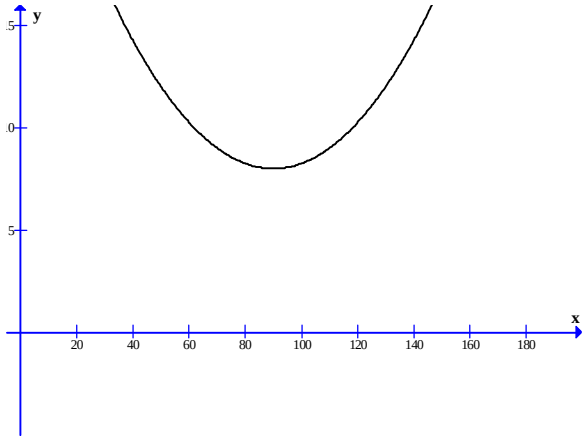


Se trata por tanto de un valor mínimo.

El consumo mínimo es $y=\frac{90^2}{400}-\frac{90\cdot 9}{20}+\frac{113}{4}=\frac{8100-16200+11300}{400}=8$ litros cada 100 Km.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

b)



El consumo va disminuyendo a medida que nos acercamos a los 90 Km./h y a partir de esta velocidad, el consumo aumenta.

3B

a)

- p (salir 11) = p (salir cara)-p(salir 11 / sacar cara)+ p(salir cruz).p(salir 11 / sacar cruz) = $\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{36}=\frac{1}{36}$ (si tiro dos dados y sumo los resultados, hay 2 formas de salir 11)

- p(salir 6) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{36}=\frac{11}{72}$

b) Aplicando el teorema de Bayes:

- p(cara / salir 6) = $\frac{p(cara\cap salir\ 6)}{p(salir\ 6)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{11}{72}}=\frac{6}{11}$

4B

Si X = número de veces que se cae un esquiador debutante

Es una binomial con n = 5 y p = 0´4 $\qquad X \to B(5, 0´4)$

$$p(X\geq 3)=p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)=$$

$$=\binom{5}{3}(0´4)^3(0´6)^2+\binom{5}{4}(0´4)^4(0´6)^1+\binom{5}{5}(0´4)^5(0´6)^0=0´2304+0´0768+0´01024=0´31744$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com